

Daraus folgt dann für die relative Änderung von  $\bar{R}^q$

$$\frac{\Delta \bar{R}^q}{\bar{R}^q} \approx \varepsilon (1 - i n k R) \quad (86)$$

und für die absolute Änderung

$$\Delta \bar{R}^q \approx -i \varepsilon M k R. \quad (87)$$

Radiusänderungen der Stromwindung wirken sich also wegen  $n k R \gg 1$  relativ stark aus. Bei einer Vergrößerung des Radius wird der mittlere Widerstand kapazitiver; der Realteil bleibt unverändert. Die Leistungsaufnahme der Spule und damit die Summe der abgestrahlten und absorbierten Wirkleistung bleibt also konstant.

## Hochfrequenzheizung eines Plasmazylinders in einem axialen Magnetfeld\*

Von KLAUS KÖRPER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, München

(Z. Naturforsch. 15 a, 235—243 [1960]; eingegangen am 17. Januar 1960)

The conditions under which the effect of ion-electron-scattering on radial oscillations near the ion-resonance of an infinite plasma cylinder in an axial magnetic field may lead to a heating of the plasma, possibly sufficient to induce thermonuclear reaction, are examined.

The magnetic field strengths needed to stabilize the plasma, and the density of the plasma necessary to guarantee a sufficient rate of reaction require that we consider the optical behaviour in the decimeter-wavelength-range.

In an equivalent model for the supplying circuit the reaction of the plasma is taken into account in a quantitative manner.

Because of the finite extent of the plasma a dense spectrum of eigenresonances of the plasma system exists. Therefore the matching of the external circuit to the plasma is possible only in the mean.

Numerical results are given for the energy absorbed, the radiative energy penetrating the plasma cylinder, and the corresponding reactive output, as functions of the plasma density, the temperature and the frequency (near the "ion-resonance" = geometric mean value between the gyrofrequencies of the ions and electrons), when the oscillator and the plasma are optimally matched (Fig. 4, 5, 6).

In früheren Arbeiten<sup>1, 2</sup> sind die radialen Schwingungen eines unendlich langen homogenen Plasmazylinders in einem axialen homogenen Magnetfeld untersucht worden, welche durch azimutale, eine HF-Spule repräsentierende Oberflächenströme angeregt werden. Aus energetischen Betrachtungen des Strahlungsfeldes des schwingenden Plasmazylinders ließ sich die Eingangsimpedanz der Spule herleiten<sup>3</sup>. Dabei wurde der Oberflächenstrom in ein System von linearen Strömen aufgelöst und die Spulen- und Zylinderlänge auf einen endlichen Wert begrenzt, aber die Zylindersymmetrie beibehalten.

Ziel dieser Untersuchung ist die Entscheidung, bis zu einem welchen Grade Energie aus der elektromagnetischen Welle vom Plasma absorbiert wird. Dabei wird sich eine Energiebildung im wesentlichen auf einen Vergleich der in einem Plasma endlicher

Lineardimension absorbierten Leistung zu der von der das Plasma durchdringenden Welle mitgeführten Energie stützen, denn andere, evtl. auftretende Energieverluste sind mehr durch die spezielle technische Anordnung als durch die Eigenschaften des Plasmas bedingt, und lassen sich im Prinzip zu Null machen. Sie werden daher nur sehr pauschal abgeschätzt werden können.

Auf diese Weise werden einige wesentliche Terme der allgemeinen Differentialgleichung bestimmt, welche während der Aufheizphase den zeitlichen Verlauf des Energieinhaltes und damit der Temperatur des Plasmas festlegt. Zur Integration wäre allerdings ein weiterer Einblick in die nicht berücksichtigten Verlustprozesse, z. B. mikroskopische Strahlung der Plasmamaterie, oder Korpuskularstrahlung aus dem Plasma heraus nötig.

\* Auszugsweise vorgelegt auf der Intern. Konferenz über die friedliche Anw. der Atomenergie, Genf, Sept. 1958. Vortragen auf der Tagung der Physikalischen Gesellschaft in Bayern, in München, am 29. 4. 1959, und auf der Plastagung, T.H. Aachen, am 26. 10. 1959.

<sup>1</sup> K. KÖRPER, Z. Naturforsch. 12 a, 815 [1957]. Im folgenden mit I zitiert.

<sup>2</sup> K. KÖRPER, Z. Naturforsch. 15 a, 220 [1960]. Im folgenden mit II zitiert.

<sup>3</sup> K. KÖRPER, Z. Naturforsch. 15 a, 226 [1960]. Im folgenden mit III zitiert.



Wegen der elektrodynamischen Rückwirkung des Plasmas auf die Spule und den Generator kann weder die Amplitude der anregenden Welle, noch der Spulenstrom konstant vorgegeben werden. Im Rahmen eines ersatzmäßigen Modells für die gesamte elektrische Anordnung wird versucht, diese Rückwirkung quantitativ zu berücksichtigen.

Da sich die Leistungsanpassung auf Grund spezifischer Plasmaeigenschaften nicht unmittelbar nach üblichen Methoden der Hochfrequenztechnik behandeln lässt, wird die günstigste Anpassung nach einem Variationsverfahren bestimmt.

### 1. Das Anpassungsproblem

Der Strom  $\hat{I}_\varphi$ , der die Amplituden<sup>1</sup>

$$a = \frac{4\pi}{c} \hat{I}_\varphi \cdot \frac{H_1^{(2)}(kR)}{J_1(nkR) H_0^{(2)}(kR) - n J_0(nkR) H_1^{(2)}(kR)} \quad (1)$$

und

$$\alpha_2 = \frac{4\pi}{c} \hat{I}_\varphi \cdot \frac{J_1(nkR)}{J_1(nkR) H_0^{(2)}(kR) - n J_0(nkR) H_1^{(2)}(kR)} \quad (2)$$

der Welle im Plasma ( $r \leq R$ )

$$E_\varphi(r, t) = a J_1(nkR) e^{i\omega t}, \quad (3)$$

$$H_z(r, t) = a i n J_0(nkR) e^{i\omega t} \quad (4)$$

und

$$E_\varphi(r, t) = \alpha_2 H_1^{(2)}(kr) e^{i\omega t}, \quad (5)$$

$$H_z(r, t) = \alpha_2 i H_0^{(2)}(kr) e^{i\omega t} \quad (6)$$

im Vakuum ( $r \geq R$ ) eines in einem axial gerichteten Magnetfeld schwingenden unendlich langen homogenen Plasmazylinders mit dem Radius  $R$  wesentlich mitbestimmt, wird festgelegt durch die an dem elektrischen Kreise wirkende Spannung und den im Schaltkreis liegenden Widerständen. Als Lastwiderstand wird der ursprüngliche Ausdruck

$$\mathfrak{R} = (-i) M \frac{H_1^{(2)}(kR) J_1(nkR)}{J_1(nkR) H_0^{(2)}(kR) - n J_0(nkR) H_1^{(2)}(kR)} \quad (7)$$

[vgl. III, Gl. (31)] für  $\mathfrak{R}$  eingesetzt, nicht der Phasenmittelwert  $\bar{\mathfrak{R}}^\varphi$ . Auf diese Weise kann zu jeder Phasenlage des Schwingungszustandes des Plasmazylinders der Leistungsstrom  $\mathfrak{J}$  aus dem momentanen Spulenwiderstand, der Klemmspannung des Generators und den Übertragungsgliedern zwischen Heizspule und Generator, die der Anpassung dienen, berechnet werden. Dieser Spulenstrom be-

stimmt über die Gln. (1) bis (6) die Amplitude der elektromagnetischen Wellen im Plasma und im Vakuum. Hieraus lassen sich dann über die Oberflächenintegrale der entsprechenden POYNTING-Vektoren die Real- und die Imaginärteile der momentanen Leistungen, gemittelt über die zeitliche Periode, im Plasma und im Vakuum bestimmen. Da wegen der Eigenschwingung des Plasmazylinders dicht liegende starke Resonanzen auftreten, hat man dann nachträglich durch Integration über alle Phasen den Mittelwert der Leistung zu bilden. Falls  $n_r \gg |n_i|$  ist, kann man hierbei näherungsweise die langsam variablen Funktionen als konstant ansehen und nur die schnell oszillierenden berücksichtigen. Daher ist in den Mittelwerten neben dem Brechungsindex und Magnetfeld, Teilchendichte und Temperatur, dem inneren Widerstand des Generators und den Anpaßwiderständen, den geometrischen Daten der Heizspule auch noch die Frequenz der Schwingung enthalten.

Man kann bekanntlich jeden Generator ersatzmäßig nachbilden durch die Serienschaltung einer Spannungsquelle mit einem im allgemeinen komplexen, in erster Näherung von der Strombelastung unabhängigen Innenwiderstand  $\mathfrak{R}_i$ . Der allgemeine lineare passive Vierpol lässt sich z. B. durch ein T-Glied darstellen, welches drei komplexe Parameter  $\mathfrak{L}_1$ ,  $\mathfrak{L}_2$ ,  $\mathfrak{L}_3$  enthält. Dementsprechend soll der weiteren Berechnung das Schaltschema (Abb. 1) zu-

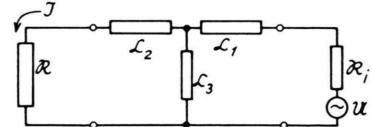


Abb. 1. Ersatzschaltbild für den gesamten elektrischen Kreis, bestehend aus Plasmaspule, Anpassungsglied und Generator.

grunde liegen. Da man im Höchstfrequenzbereich formal das elektromagnetische Feld in den Wellenleitern auf Spannung und Ströme in quasi-stationären Kreisen abbilden kann<sup>4</sup>, lässt sich die Schaltung auch im Dezimeter- und Zentimeterwellenbereich anwenden.

Man erhält zwischen Leerlaufspannung  $U_0$  des Generators und dem Strom  $\mathfrak{J}$  in der Plasmaspule die Relation

$$U_0 = \mathfrak{J} \left[ \mathfrak{R} + \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3 \frac{\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{R}_i}{\mathfrak{L}_3 + \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{R}_i} \right] \left( 1 + \left( \frac{\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{R}_i}{\mathfrak{L}_3} \right) \right). \quad (8)$$

<sup>4</sup> Principles of Microwave Circuits, Radiation Laboratory Series, Vol. 8, McGraw-Hill Book Comp. Inc. 1948.

Im folgenden werde der Vierpol als dissipationsfrei vorausgesetzt, eine Bedingung, die mindestens im Zentimeterbereich sehr gut erfüllt werden kann. Die Parameter  $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3$  sind dann rein imaginär. Faßt man  $\Im\{\mathfrak{R}_i\}$  mit dem in Serie liegenden imaginären  $\mathfrak{L}_1$  zusammen und zieht man  $R_i = \Re\{\mathfrak{R}_i\}$  vor den ganzen Ausdruck, so geht (8) über in

$$\mathfrak{U} = \Im R_i [\mathfrak{W} + p + i q] \frac{e^{iz}}{\sqrt{p}}. \quad (9)$$

Hierin bedeuten

$$p = \frac{B_3^2}{1 + (B_1 + B_3)^2}, \quad (10)$$

$$q = B_2 + B_3 \frac{1 + B_1(B_1 + B_3)}{1 + (B_1 + B_3)^2} \quad (11)$$

und

$$\mathfrak{W} = \Re R_i. \quad (12)$$

Es ist  $\mathfrak{W}^{-1} = \mathfrak{W}_V^{-1} + \mathfrak{W}_P^{-1}$

mit den modifizierten Feldwellenwiderständen

$$\mathfrak{W}_V = \left( \frac{E_\varphi}{H_z} \right)_V \cdot \frac{M}{R_i}, \quad \mathfrak{W}_P = - \left( \frac{E_\varphi}{H_z} \right)_P \cdot \frac{M}{R_i}. \quad (14)$$

[Vgl. III, Gln. (36), (37).]

Die  $B_\nu$  werden definiert durch

$$\mathfrak{L}_\nu = i(B_\nu R_i - \delta_{1\nu} \Im\{\mathfrak{R}_i\}) \quad (\nu = 1, 2, 3); \quad (15)$$

$\delta_{1\nu}$  ist das KRONECKER-Symbol. Die Phase

$$\chi = -\text{arc cotg}(B_1 + B_3) \quad (16)$$

fällt bei der späteren Betragsbildung heraus.

Auf Grund der Beschränkung auf nicht dissipierende Schaltelemente im Anpaßvierpol ergibt sich, daß bei vorgegebener Leerlaufspannung des Generators der Strom und damit auch die Wellenamplituden von den drei reellen Parametern  $p, q$  und  $\chi$ , aber die Leistungen nur noch von den zwei reellen Parametern  $p$  und  $q$  abhängen. Aus der Darstellung (9) ersieht man, daß sich unter diesen Voraussetzungen das Schaltschema Abb. 1 zu einer einfachen Serienschaltung Abb. 2 vereinfachen läßt, in der die Spannung  $\mathfrak{U}(\sqrt{p}/R_i) e^{-iz}$  den Strom  $\mathfrak{J}$  durch die in Serie liegenden dimensionslosen Widerstände  $\mathfrak{W}$  und  $p + iq$  treibt.

Da wegen Phasenverschiebungen der Widerstand  $\Re$  (bzw.  $\mathfrak{W}$ ) [vgl. III] während des Heizvorganges nicht konstant bleibt, sondern sehr schnell mehrere Perioden durchläuft, kann man eine Leistungsanpassung nicht dadurch erreichen, daß man nach den Regeln der Hochfrequenztechnik den festen, konjugiert komplexen Widerstand  $\Re^*$  in Serie legt.

Man kann höchstens eine Anpassung der Leistungen im Phasenmittel anstreben. Durch geeignete Wahl von  $p$  und  $q$  soll im Mittel ein möglichst großer Anteil der aufgewandten Leistung absorbiert werden. Durch Einstellung von  $p$  und  $q$  wird das komplexe Verhältnis zwischen Strom und Spannung in dem für die Absorption wesentlichen Teilzweig  $\mathfrak{W}_P$  (Abb. 2) und damit  $(E_\varphi/H_z)_P$  der Welle nach Be-

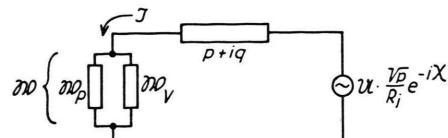


Abb. 2. Modifiziertes Ersatzschaltbild.

trag und Phase am Plasmarand möglichst günstig festgelegt. Die Vorgänge im Zweig  $\mathfrak{W}_V$  bestimmen im wesentlichen die Verluststrahlung ins Vakuum. Bei der Variation des Anpaßwiderstandes unterliegt wegen (10) der Realteil der Einschränkung  $p > 0$ . Die Umkehrung der Gln. (10) und (11) ist nicht eindeutig

$$B_1^2 = \frac{(q - B_2)^2}{p} + p - 1, \quad (17)$$

$$B_3 = B_1 \frac{p}{1-p} + \frac{q - B_2}{1-p}, \quad (18)$$

denn in dieser Schreibweise der Umkehrfunktionen erscheint die Größe  $B_2$  frei wählbar. Eine Beschränkung tritt dadurch ein, daß  $B_1^2 > 0$  bleiben muß.

## 2. Leistungsaufnahme des Plasmas

Mit Gl. (9) läßt sich in den Amplituden  $a$  (1) und  $\alpha_2$  (2) der Strom  $\hat{I}_\varphi = \nu \Im$  eliminieren ( $\nu$  ist die Zahl der Windungen pro Längeneinheit der Spule):

$$a = i \frac{4\pi}{c} \nu \frac{H_1(2)(kR)}{\mathfrak{N}(\omega)} \cdot \frac{\mathfrak{U}}{R_i(\mathfrak{W} + p + iq)} \sqrt{p} e^{-iz}, \quad (19)$$

$$\alpha_2 = i \frac{4\pi}{c} \nu \frac{J_1(nkR)}{\mathfrak{N}(\omega)} \cdot \frac{\mathfrak{U}}{R_i(\mathfrak{W} + p + iq)} \sqrt{p} e^{-iz}. \quad (20)$$

Einsetzen in die durch einfache Integration der Lösung des schwingenden Plasmazyinders (1) bis (6) gewonnenen Energieausdrücke [vgl. III, Gln. (16) und (22)]

$$P_1 = \frac{cR}{4} |\alpha_2|^2 (W - iV) \quad (21)$$

und

$$P_2 = \frac{cR}{4} |a|^2 i n^* J_1(nkR) J_0^*(nkR) \quad (22)$$

liefert dann den Zeitmittelwert der komplexen Strahlungsleistung der Plasmaspule pro Längeneinheit

$$P_1 = \left| \frac{4\pi}{c} \mathfrak{U} \right|^2 \left( \frac{v}{R_i} \right)^2 \frac{cR}{4} (W - iV) \frac{p}{N} \cdot [\sin^2 x_r \cdot \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^2 x_i + \cos^2 x_r \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{n}^2 x_i] \quad (23)$$

und die Leistung im Plasma

$$P_2 = \left| \frac{4\pi}{c} \mathfrak{U} \right|^2 \left( \frac{v}{R_i} \right)^2 \frac{cR}{4} \alpha \frac{p}{N} \cdot \{ (n_i \sin x_r \cdot \cos x_r - n_r \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{n} x_i \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} x_i) + i(n_i \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{n} x_i \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} x_i + n_r \cdot \sin x_r \cdot \cos x_r) \} . \quad (24)$$

$$a = \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^2 x_i (n_r^2 + n_i^2) r^2 \alpha + \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{n}^2 x_i [r^2 \beta + m^2 \alpha + 2m(pW - qV)] - 2 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} x_i \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{n} x_i [n_r(r^2 W + p m \alpha) + n_i(r^2 V - q m \alpha)], \quad (27)$$

$$c = \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^2 x_i [r^2 \beta + m^2 \alpha + 2m(pW - qV)] + \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{n}^2 x_i (n_r^2 + n_i^2) r^2 \alpha - 2 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} x_i \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{n} x_i [n_r(r^2 W + p m \alpha) + n_i(r^2 V - q m \alpha)], \quad (28)$$

$$b = n_r(-r^2 V + q m \alpha) + n_i(r^2 W + p m \alpha) \quad (29)$$

$$\text{mit} \quad r^2 = p^2 + q^2 \quad (30)$$

$$m = \frac{M}{R_i} = \frac{4\pi}{c} 2\pi R \frac{l r^2}{R_i}. \quad (31)$$

Die Größe  $W$  bedeutet die WRONSKISCHE DETERMINANTE

$$W = J_1(kR) N_0(kR) - J_0(kR) N_1(kR) \equiv \frac{2}{\pi} \frac{1}{kR}. \quad (32)$$

$V$  steht als Abkürzung für

$$V = J_0(kR) J_1(kR) + N_0(kR) N_1(kR) \quad (33)$$

und  $\alpha$  und  $\beta$  für

$$\alpha = J_1^2(kR) + N_1^2(kR) = |H_1^{(2)}(kR)|^2, \quad (34)$$

$$\beta = J_0^2(kR) + N_0^2(kR) = |H_0^{(2)}(kR)|^2.$$

Der Grenzfall  $p=1, q=0, m=0$  ( $R_i \rightarrow \infty$  und notwendig  $\mathfrak{U} \rightarrow \infty$ ) beschreibt die Verhältnisse bei Vorgabe eines von der Belastung unabhängigen Spulenstroms  $\mathfrak{J} = \mathfrak{U}/R_i = \text{const.}$  Da dann die Leistungen allein durch die Spulenimpedanz  $\mathfrak{R}$  bestimmt werden, gehen in diesem Fall die Koeffizienten (27) bis (29) in die von III, Gln. (48) bis (50) über.

Da die Diskriminante der quadratischen Form  $N$  (26) und der Koeffizient  $a$  positiv sind, ist  $N$  positiv definit.

$$a c - b^2 = [\bar{A} \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{n} 2x_i - \bar{B} \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} 2x_i]^2; \quad (35)$$

$\bar{A}$  und  $\bar{B}$  sind reelle Koeffizienten, die die Daten des Plasmas und der Spule und die Anpaßwiderstände enthalten. Es folgt also, daß die Joulesche Wärme im Plasma positiv ist, wie notwendig und daß die momentane Blindleistung induktiv und kapazitiv

$\mathfrak{N}(\omega)$  steht als Abkürzung für den Resonanznenner des schwingenden Plasmazylinders

$$\mathfrak{N}(\omega) \equiv J_1(n k R) H_0^{(2)}(k R) - n J_0(n k R) H_1^{(2)}(k R) \quad (25)$$

[vgl. auch II, Gl. (41)]. Der Nenner

$$N = a \cos^2 x_r + 2b \cos x_r \sin x_r + c \sin^2 x_r \quad (26)$$

enthält die Koeffizienten

sein kann, je nach dem Vorzeichen des zweiten Terms von  $\mathfrak{Im}\{P_2\}$  und seiner Größe relativ zum ersten Term, der positiv semidefinit ist. Die Wirkleistung im Plasma ist in erster Näherung proportional dem Imaginärteil des Brechungsindexes und dieser proportional der Häufigkeit der Stöße zwischen Ionen und Elektronen. Bei verschwindender Stoßzahl  $\gamma (n_i = x_i = 0)$  bleibt in (24) nur die durch die Massenträgheit der Ionen bedingte große Blindleistung übrig. Aus (23) erkennt man, daß wegen  $V \approx W$  im Vakuum die Blindleistung stets in der Größenordnung der Strahlungsleistung der als Antenne wirkenden Spule liegt.

Die energetischen Gesamtverhältnisse sind am günstigsten, wenn das elektrische Feld am Plasmarand verschwindet ( $\sin x_i = 0$ ). Dann wird das die Effektivität angebende Verhältnis, falls  $|x_i| \ll 1$ ,

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{W - iV}{\alpha} \frac{(-) \mathfrak{S}\mathfrak{I}\mathfrak{n} x_i}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} x_i \cdot (n_r - i n_i)} \approx \frac{W - iV}{\alpha} \frac{-x_i}{n_r - i n_i}, \quad (36)$$

$$\frac{P_{1r}}{P_{1i}} \approx -1; \quad \frac{P_{1r}}{P_{2r}} \approx \frac{W - x_i}{\alpha n_r} \ll 1; \quad \frac{P_{2i}}{P_{2r}} \approx \frac{-n_i}{n_r} \ll 1. \quad (37)$$

Da aber praktisch eine äußere Einstellung dieses speziellen Schwingungszustandes unmöglich ist<sup>3</sup>, hat man eine geeignete Mittelwertbildung über alle Phasen vorzunehmen. Diese Mittelwertbildung der Leistung läßt sich nach elementaren Methoden durchführen, da alle vorkommenden Integrale vom Typ

$$\overline{\mathfrak{U}\mathfrak{U}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\alpha \cdot \cos^2 x + 2 \beta \cdot \cos x \cdot \sin x + \gamma \cdot \sin^2 x}{a \cdot \cos^2 x + 2b \cdot \cos x \cdot \sin x + c \cdot \sin^2 x} dx \quad (38)$$

sind mit reellen Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$ ; und  $a, b, c$  (27), (28), (29). Man erhält:

$$\bar{P}_1^{\varphi} = \left| \frac{4\pi}{c} \mathfrak{U} \right|^2 \left( \frac{\nu}{R_i} \right)^2 \frac{cR}{4} (W - iV) \frac{p}{4b^2 + (a-c)^2} \left[ (c-a) + \frac{2b^2 + a(a-c)}{\sqrt{ac-b^2}} + x_i^2 \left( (a-c) + \frac{2b^2 - c(a-c)}{\sqrt{ac-b^2}} \right) \right], \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_2^{\varphi} = \left| \frac{4\pi}{c} \mathfrak{U} \right|^2 \left( \frac{\nu}{R_i} \right)^2 \frac{cR}{4} \alpha p \left[ \frac{n_r(-x_i)}{\sqrt{ac-b^2}} + \frac{n_i b}{4b^2 + (a-c)^2} \left( 2 - \frac{a+c}{\sqrt{ac-b^2}} \right) \right. \\ \left. + i \left( \frac{n_i x_i}{\sqrt{ac-b^2}} + \frac{n_r b}{4b^2 + (a-c)^2} \left( 2 - \frac{a+c}{\sqrt{ac-b^2}} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Diese Gleichungen gelten allgemein für jeden unstarren dielektrischen Zylinder mit dem Brechungsindex  $n$ , falls nur  $n k R \gg 1$  ist.

In einigen Fällen ist bereits auf analytischem Wege eine gewisse Übersicht zu gewinnen: Der Fall, daß an der Spule unabhängig von deren Widerstand die konstante Spannung  $\mathfrak{U}$  liegt, ( $R_i = 0$ ) läßt sich formal leicht aus den allgemeinen Gl. (23) und (24) gewinnen. Man erhält als Koeffizienten des Nenners  $N$

$$a = M^2 \alpha \Im \sin^2 x_i, \quad c = M^2 \alpha \Im \sin^2 x_i, \quad b = 0, \quad (41)$$

so daß für die Strahlungsleistung folgt

$$P_1 = \left| \frac{4\pi}{c} \mathfrak{U} \right|^2 \nu^2 \frac{cR}{4} (W - iV) \frac{1}{M^2 \alpha}. \quad (42)$$

Hier haben sich alle oszillierenden Terme herausgehoben. Bei großem Imaginärteil des Brechungsindexes  $|x_i| \gg 1$  überwiegt in allen Termen der Einfluß der Hyperbelfunktion den der trigonometrischen Funktionen:

$$P_2 = \left| \frac{4\pi}{c} \mathfrak{U} \right|^2 \nu^2 \frac{cR}{4} \frac{n_r - i n_i}{M^2}. \quad (43)$$

Jedoch besitzt in diesem Falle die Welle nur eine Eindringtiefe in das Plasma der Größe  $d = 1/|n_i|k$ . Bei kleiner Dämpfung der Welle ( $|x_i| \ll 1$ ) muß  $|x_i| > 0$  vorausgesetzt werden, da sonst durch die Nullstellen der Eingangsimpedanz (7) wegen der Abwesenheit sonstiger strombegrenzender Widerstände im Heizkreis die Leistungen unendlich werden und die Integrale divergieren.

Für  $\bar{P}_2^{\varphi}$  erhält man auch in diesem Falle den Ausdruck (43), so daß man mit einem sehr günstigen

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{4b^2 + (a-c)^2} \left[ (\alpha - \gamma)(a-c) + 4b\gamma + \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} (2b^2(\alpha + \gamma) + (a-c)(a\gamma - \alpha c) - 2b\beta(a+c)) \right]. \quad (47)$$

Hierin bedeuten die Koeffizienten

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2, & a &= \alpha_3^2 + \alpha_4^2, \\ \beta &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2, & b &= \alpha_3 \beta_3 + \alpha_4 \beta_4, \\ \gamma &= \beta_1^2 + \beta_2^2, & c &= \beta_3^2 + \beta_4^2. \end{aligned} \quad (48)$$

Wirkungsgrad der Größenordnung  $n_r$  rechnen könnte.

Den dualen Fall, daß durch die Spule unabhängig von deren Widerstand ein konstanter Strom  $\mathfrak{J}$  fließt, kann man wegen  $P^{\varphi} = \frac{1}{2} |\mathfrak{J}|^2 \mathfrak{R}^{\varphi}$  unmittelbar an die Betrachtungen zum Widerstand  $\mathfrak{R}$  anschließen. Aus [III, Gl. (59)] kann man dort wegen der bereits erfolgten Aufspaltung in die zu  $P_1$  und  $P_2$  gehörigen Terme den Wirkungsgrad unmittelbar entnehmen.

### 3. Berücksichtigung von Leitungsverlusten

Im Rahmen des in Abb. 1 gegebenen Modells für den elektrischen Kreis zur HF-Heizung können OHM-sche Verluste nur in  $R_i$  auftreten. Im folgenden wird eine Formel hergeleitet, welche diesen Energieverlust zu berechnen gestattet. Zwischen Leerlaufspannung  $\mathfrak{U}$  des Generators und Strom  $\mathfrak{J}_i$  durch Generator und  $R_i$  besteht der Zusammenhang

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{J}_i R_i \left( 1 + \frac{i(B_1 + B_3) \mathfrak{W} - B}{i(B_2 + B_3) + \mathfrak{W}} \right), \quad (44)$$

$$\text{wobei } B = B_1 B_2 + B_1 B_3 + B_2 B_3 \quad (45)$$

bedeutet. Die  $B_i$  sind die reduzierten Blindwiderstände des T-Gliedes (15). Der Strom  $\mathfrak{J}_i$  hängt von  $\mathfrak{R}$  und damit stark von der Phasenlage  $x_r$  der Schwingung im Plasma ab, wenn  $n_r \gg |n_i|$ .

Es ergibt sich der Phasenmittelwert

$$L_1 = \frac{|\mathfrak{U}|^2}{2} \frac{1}{R_i} \mathfrak{U} \mathfrak{U} \mathfrak{U} \mathfrak{U}. \quad (46)$$

Für das in (38) erklärte folgt

Die Diskriminante ist positiv definit.

$$a c - b^2 = (\alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3)^2 > 0. \quad (49)$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= m J_1 \operatorname{Sin} x_i - (B_2 + B_3) C_1, \\
\beta_1 &= -m N_1 \operatorname{Cos} x_i - (B_2 + B_3) C_2, \\
\alpha_2 &= -m N_1 \operatorname{Sin} x_i + (B_2 + B_3) C_3, \\
\beta_2 &= -m J_1 \operatorname{Cos} x_i + (B_2 + B_3) C_4, \\
\alpha_3 &= \alpha_1 + m (B_1 + B_3) N_1 \operatorname{Sin} x_i - B C_3, \\
\beta_3 &= \beta_1 + m (B_1 + B_3) J_1 \operatorname{Cos} x_i - B C_4, \\
\alpha_4 &= \alpha_2 + m (B_1 + B_3) J_1 \operatorname{Sin} x_i - B C_1, \\
\beta_4 &= \beta_2 - m (B_1 + B_3) N_1 \operatorname{Cos} x_i - B C_2, \\
C_1 &= J_0 \operatorname{Sin} x_i + (-n_i J_1 + n_r N_1) \operatorname{Cos} x_i, \\
C_2 &= -N_0 \operatorname{Cos} x_i + (n_i N_1 + n_r J_1) \operatorname{Sin} x_i, \\
C_3 &= N_0 \operatorname{Sin} x_i - (n_i N_1 + n_r J_1) \operatorname{Cos} x_i, \\
C_4 &= J_0 \operatorname{Cos} x_i - (-n_i J_1 + n_r N_1) \operatorname{Sin} x_i.
\end{aligned} \tag{50}$$

Alle BESSEL- und NEUMANN-Funktionen sind an der Stelle  $k R$  zu nehmen.

OHMSche Verluste in den Leitungen und auf Grund des Skin-Effektes auch in der HF-Spule werden durch das Ersatzschaltbild (Abb. 1) nicht erfaßt. Sie können pauschal durch einen mit der Spule in Serie liegenden Wirkwiderstand  $R_V$  berücksichtigt werden. Daraus ergibt sich, daß die hier verfolgte Theorie der variablen Eingangsimpedanz  $\Re$  der Spule sinnvoll ist und die OHMSchen Verluste vernachlässigt werden können, falls  $R_V \ll \Re \{\Re\}$  ist. Andernfalls wird der Spulenstrom  $\Im$  durch  $R_V$  praktisch konstant gehalten, auch wenn sich  $\Re$  durch Schwanlung der Plasmadaten ändert. Deshalb können in diesem Fall die energetischen Verhältnisse an der Spule unmittelbar aus dem Ausdruck für  $\Re$  [III, (59)] abgelesen werden. Den überwiegenden Energieposten in der Bilanz stellen aber die Verluste in  $R_V$  dar.

Im anderen Fall hat man in der Strom-Spannungsbeziehung (9) den Widerstand  $p$  durch

$$p' = p + R_V / R_i \tag{51}$$

zu ersetzen. Dann ergibt sich für den Phasenmittelwert der im Verlustwiderstand  $R_V$  erzeugten JOULESchen Wärme

$$L_2 = R_V \frac{|\Im|^2}{2} = \frac{|\mathcal{U}|^2}{2} R_V \frac{p}{R_i^2} \text{ III} \tag{52}$$

Für die Koeffizienten in (47) hat man zu setzen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= N_0 \operatorname{Sin} x_i - (n_r J_1 + n_i N_1) \operatorname{Cos} x_i, \\
\beta_1 &= J_0 \operatorname{Cos} x_i + (n_r N_1 - n_i J_1) \operatorname{Sin} x_i, \\
\alpha_2 &= J_0 \operatorname{Sin} x_i - (n_r N_1 - n_i J_1) \operatorname{Cos} x_i, \\
\beta_2 &= -N_0 \operatorname{Cos} x_i + (n_r J_1 + n_i N_1) \operatorname{Sin} x_i, \\
\alpha_3 &= m J_1 \operatorname{Sin} x_i + p' \alpha_1 - q \alpha_2,
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= -m N_1 \operatorname{Cos} x_i + p' \beta_1 - q \beta_2, \\
\alpha_4 &= -m N_1 \operatorname{Sin} x_i + p' \alpha_2 + q \alpha_1, \\
\beta_4 &= -m J_1 \operatorname{Cos} x_i + p' \beta_2 + q \beta_1.
\end{aligned}$$

Alle BESSEL- und NEUMANN-Funktionen sind an der Stelle  $k R$  zu nehmen.

#### 4. Auswertung und Ergebnisse

Ein Überblick über die Ausdrücke (39) und (40) für die Leistungsnaufnahme kann leider nur auf numerischem Wege gewonnen werden. Die Auswertung erfolgte auf der Göttinger elektronischen Rechenmaschine G 2.

Durch Variiierung der Größen  $p$  und  $q$  in der rechten komplexen Halbebene der Variablen  $p + i q$  wurde die optimale Anpassung als Funktion der Plasmaparameter bestimmt. Dabei wurde die Halbebene durch die Transformation

$$\xi = \frac{p}{1+p}, \quad \eta = \frac{q}{1+|q|} \tag{54}$$

auf das endliche Rechteck  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $-1 \leq \eta \leq +1$  in der  $\xi - \eta$ -Ebene abgebildet. Für ein hinreichend dichtes Netz von Gitterpunkten wurden die Funktionswerte von  $\Re \{\bar{P}_1\}$ ,  $\Im \{\bar{P}_1\}$ ,  $\Re \{\bar{P}_2\}$ ,  $\Im \{\bar{P}_2\}$  berechnet. Die hierdurch bestimmten Flächen über dem Rechteck sind im geometrischen Typ fast unabhängig von den Plasmaparametern. Abb. 3 zeigt als Beispiel einen Schnitt an der für die Anpassung günstigsten Stelle  $p = 1/9$  entsprechend  $\xi = 0, 1$ .

Für alle physikalisch wichtigen Werte der Teilchendichte, der Temperatur und der Frequenz, mindestens im Bereich

$$\begin{aligned}
10^5 \text{ K} &\leq T \leq 10^8 \text{ K}, \\
10^{13} \text{ cm}^{-3} &\leq N \leq 10^{15} \text{ cm}^{-3}, \\
\frac{\omega_r}{10} &\leq \omega \leq \omega_r \text{ bei } H_0 = 10^4 \text{ GAUSS}
\end{aligned}$$

gibt es eine Anpassung  $\frac{1}{9} \leq p \leq \frac{1}{4}$ ,  $q = 0$ , welche gleichzeitig die Absorption der elektromagnetischen Welle im Plasma zum Maximum, die Verluststrahlung der Spule bzw. den Anteil der an der Zylinderwand reflektierten Energie zum relativen Minimum und die Blindleistung des Plasmas praktisch zu Null werden läßt. Da die Blindleistung der Verluststrahlung proportional der Wirkleistung ist, wird auch diese hierbei zum Minimum. Da außer bei  $q \approx 0$  stets  $\Im \{\bar{P}_1\} \ll \Im \{\bar{P}_2\}$  ist, bedeutet das Verschwinden der Blindleistung im Plasma, daß

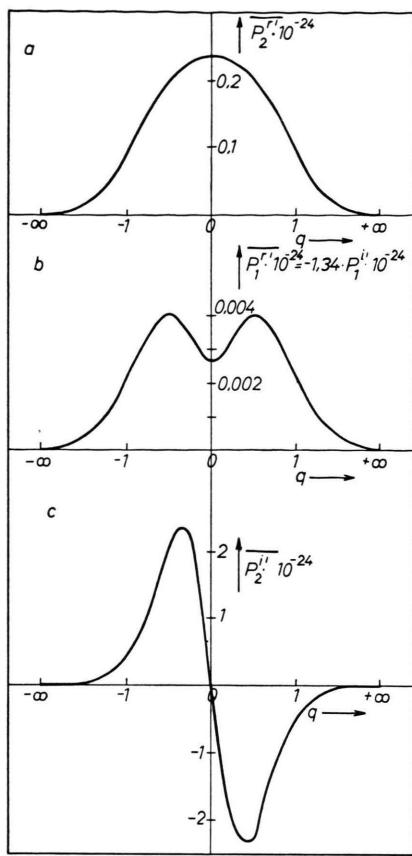


Abb. 3. Anpassung der Plasmaspule an den Generator: Absorbierte Leistung  $\bar{P}_2^r$ , Verluststrahlung  $\bar{P}_1^r$ ; die Blindleistungen im Plasma  $\bar{P}_2^i$  und im Vakuum  $\bar{P}_1^i$  bei  $p=1/9$ ,  $-\infty < q < +\infty$ . Aufgetragen ist  $P' = P / (4\pi/c) U^2$ .

wattlose Ströme in der Leitung unterdrückt und dadurch in unserem Modell nicht berücksichtigte OHM-sche Verluste klein gehalten werden. Die Festlegung der Schaltelemente im Vierpol ist noch unendlich vieldeutig (17), (18). Wählt man speziell einen symmetrischen Vierpol zur Anpassung, so hat man (vgl. Abb. 1)

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2 = \pm i R_i \bar{Vp}, \quad \mathfrak{L}_3 = \mp i R_i \bar{Vp}, \\ \frac{1}{3} \leq \bar{Vp} \leq \frac{1}{2} \quad (55)$$

zu setzen. Dieses Ergebnis besagt, daß die Teilkreise der Schaltung Abb. 1 einzeln in Resonanz stehen müssen. Der in die Rechnung eingehende Wert  $R_i = 5 \text{ k}\Omega$  entspricht größtenteils dem Innenwiderstand kommerzieller Senderöhren.

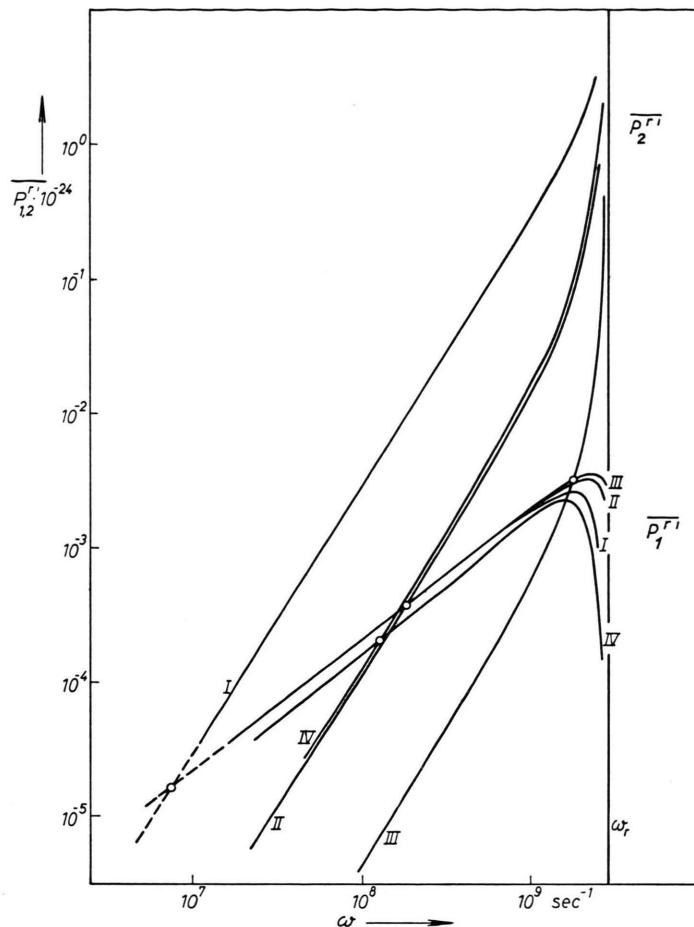


Abb. 4. Energieaufnahme eines Deuteronenplasmas als Funktion der Frequenz bei optimaler Anpassung ( $p=\frac{1}{9}$ ,  $q=0$ ). Aufgetragen ist  $P' = P / (4\pi/c) U^2$ .

Für diese optimale Anpassung wurde die Leistungsaufnahme des Plasmas berechnet. Vgl. Tab. 1. Abb. 4 zeigt die Abhängigkeit der Wirkleistungen  $\bar{P}_2^r$  und  $\bar{P}_1^r$  von der Frequenz für verschiedene Temperaturen, Abb. 5 die Abhängigkeit von der Temperatur für einige Frequenzen, und Abb. 6 die Abhängigkeit von der Teilchendichte für einige Frequenzen.

Figur 4 zeigt die ausgezeichnete Rolle der Resonanzfrequenz  $\omega_r = \omega_0$ . Die Absorption steigt in ihrer Nähe stark an und die Reflexion bzw. die Transparenz des Plasmas wird klein. Der geradlinige Teil der Kurve zeigt, daß  $\bar{P}_2^r$  mit  $\omega^2$ ,  $\bar{P}_1^r$  nur mit  $\omega$  ansteigt. Abb. 6 zeigt eine Zunahme der absorbierten Leistung mit  $N^{3/2}$ ; das bestätigt zusammen mit dem geraden Abfall von  $\bar{P}_2^r$  mit  $T^{-3/2}$  in Abb. 5, daß

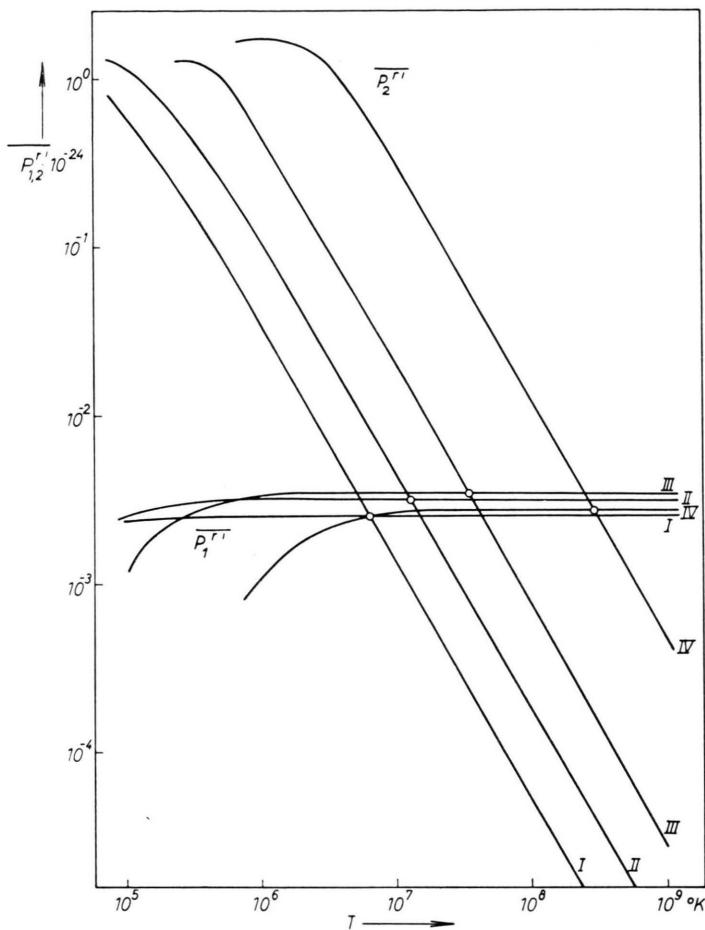


Abb. 5. Energieaufnahme eines Deuteronenplasmas als Funktion der Temperatur bei optimaler Anpassung ( $p=\frac{1}{2}$ ,  $q=0$ ). Aufgetragen ist  $P'=P/(4\pi/c) \mathcal{U}^2$ .

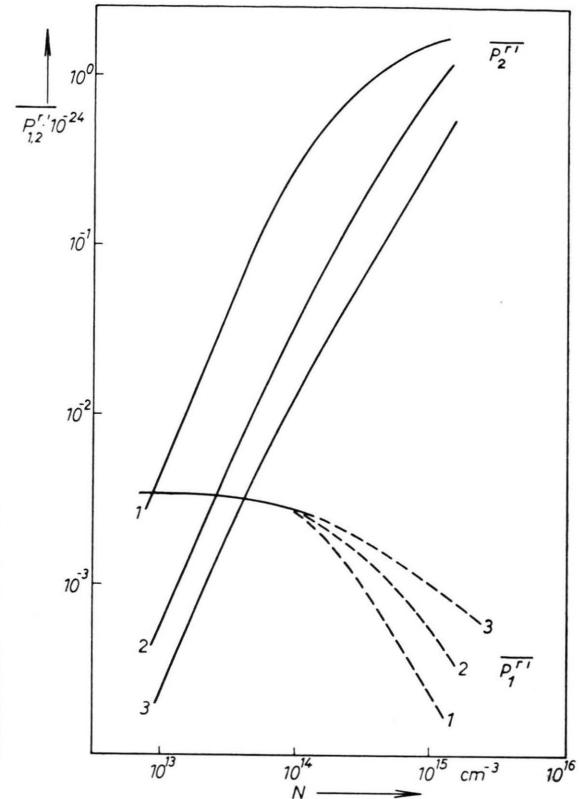


Abb. 6. Energieaufnahme eines Deuteronenplasmas als Funktion der Teilchendichte bei optimaler Anpassung ( $p=\frac{1}{2}$ ,  $q=0$ ). Aufgetragen ist  $P'=P/(4\pi/c) \mathcal{U}^2$ .

Abb.	$H_0$ GAUSS	$N$ $\text{cm}^{-3}$	$T$ $^\circ\text{K}$	$\omega$ $\text{sec}^{-1}$	$R_i$ $\text{k}\Omega$	$R$ $\text{cm}$	$\nu$ $\text{cm}^{-1}$	p	q	Parameter				
										Kurve	I	II	III	IV
3	$10^4$	$10^{14}$	$10^7$	$2,7 \cdot 10^9$	5	5	1	1/9	var.	$T$ $N$	$10^5$ $10^{14}$	$10^6$ $10^{14}$	$10^7$ $10^{14}$	$10^7$ $10^{15}$
4	$10^4$	Para- meter	Para- meter	variabel	5	5	1	1/9	0	$\omega$ $\omega_{rs}$	1,39 0,50	1,91 0,69	2,38 0,86	2,70 0,975
5	$10^4$	$10^{14}$	var.	Parameter	5	5	1	1/9	0	$\omega$ $\omega_{rs}$	2,70 0,975	2,49 0,900	2,28 0,825	
6	$10^4$	var.	$10^7$	Parameter	5	5	1	1/9	0					
7	$10^4$	$10^{14}$	$10^7$	$2,4 \cdot 10^9$	var.	5	1	1/9	0					

Tab. 1. Es bedeuten:  $H_0$  statisches Magnetfeld,  $N$  Teilchendichte,  $T$  Temperatur,  $\omega$  Frequenz der elektromagnet. Welle (in  $10^9 \text{ sec}^{-1}$ ),  $R_i$  Innenwiderstand des Generators,  $R$  Radius des Plasmazylinders,  $\nu$  Zahl der Windungen pro Längeneinheit der Plasmaspule,  $p$ ,  $q$  Parameter des Anpassungsvierpoles.

die absorbierte Leistung im wesentlichen mit  $\omega^2(N/T)^{3/2}$  ansteigt. Auch das Zusammenfallen von Kurve II und IV in Abb. 4 zeigt, daß nur das Verhältnis  $N/T$  entscheidend ist. Damit ist die Proportionalität von  $\bar{P}_2^r$  mit  $x_i = n_i \cdot \frac{\omega}{c} \cdot R$ , wie sie durch die allgemeine Gl. (40) angedeutet wird, bestätigt [vgl. II, (40)]. Die Verluststrahlung ist praktisch von der Temperatur des Plasmas unabhängig. Die Auffächerung von  $\bar{P}_1^r$  für  $N > 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  ist bedingt durch die verschiedenen starke Annäherung an die Resonanzfrequenz, welche sich bei höheren Dichten stärker bemerkbar macht. Quantitative Einzelheiten können den Figuren direkt entnommen werden. Der Schnittpunkt  $\circ$  zwischen den Kurven  $\bar{P}_1^r$  und  $\bar{P}_2^r$  muß überschritten werden, wenn die Heizung rentabel sein soll. Wie bereits auf Grund allgemeiner Überlegungen vermutet, ist eine Aufheizung des Plasmas desto günstiger, je näher man an die Resonanzfrequenz des Plasmas heranrückt, je höher die Teilchendichte und je niedriger die Temperatur ist.

In Abb. 7 ist die Abhängigkeit der Leistungsaufnahme des Plasmas von dem Innenwiderstand  $R_i$  des Generators aufgetragen. Man erkennt, daß die Strahlung der Spule bzw. die Reflexion an der Plasmaoberfläche fast unabhängig ist von  $R_i$ , während die absorbierte Leistung mit  $R_i^{-1}$  abfällt.

Eine quantitative Auswertung von (46) auf der G 2 für den Fall  $q=0$  und  $0 < p < \frac{1}{2}$  hat ergeben, daß Verluste im inneren Widerstand  $R_i$  wegen der Unterdrückung von Blindströmen bei  $q=0$  (vgl. Ab. 3 c) als klein gegen die anderen Energiebeträge vernachlässigt werden können.

In den Abb. 3 bis 7 sind an Stelle der Leistungen  $\bar{P}$  unter Abspaltung des gemeinsamen Faktors  $|\frac{4\pi}{c} \mathcal{U}|^2$  in (39), (40) die Größen  $P' = P / |\frac{4\pi}{c} \mathcal{U}|^2$  als Ordinaten aufgetragen. Entsprechend der Wahl des benutzten Maßsystems hat man für die Spannung  $\mathcal{U}$  und den Widerstand  $R_i$  die Werte im Gaußschen System einzusetzen (1 cgs Einh.  $\cong 300$  Volt,

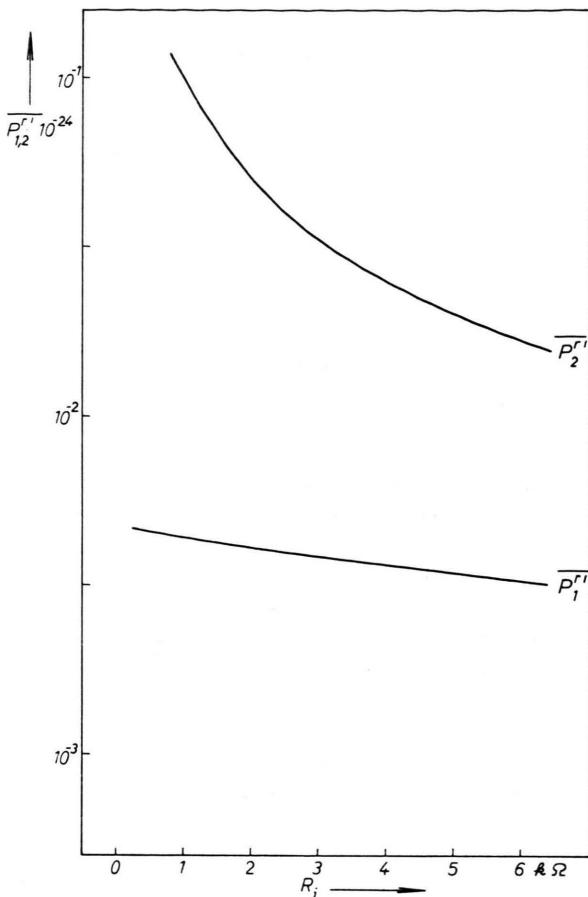


Abb. 7. Energieaufnahme eines Deuteronenplasmas in Abhängigkeit vom inneren Widerstand des Generators. Aufgetragen ist  $P' = P / (4 \pi/c) \mathcal{U}^2$ .

$1 \text{ sec cm}^{-1} \cong 9 \cdot 10^{11} \Omega$ ). Die Leistungen pro Längeneinheit des Plasmazylinders erhält man dann bekanntlich in erg/sec cm.

Herrn Prof. Dr. A. SCHLÜTER danke ich für Problemstellung und Hinweise sowie den Herren Dipl.-Phys. Dr. K. HAIN, Dr. F. MEYER und Dipl.-Phys. H. SCHMIDT für Diskussionen.